DIPLOME NATIONAL DU BREVET - EXAMEN BLANC

Epreuve de Mathématiques - Mardi 7 Mars 2023 - **Corrigé**

Exercice 1 : Menu à la carte (10 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chaque ligne du tableau, une seule proposition est juste. On ne demande pas de justifier.

Valérie va déjeuner dans son restaurant préféré : "Aux délices des maths".
Le chef cuisinier propose une carte des menus un peu particulière, le menu du jour est uniquement constitué des bonnes réponses.
Quel menu du jour va pouvoir manger Valérie aujourd'hui ? (Recopier le numéro de chaque question et le nom du plat correspondant à la bonne réponse).

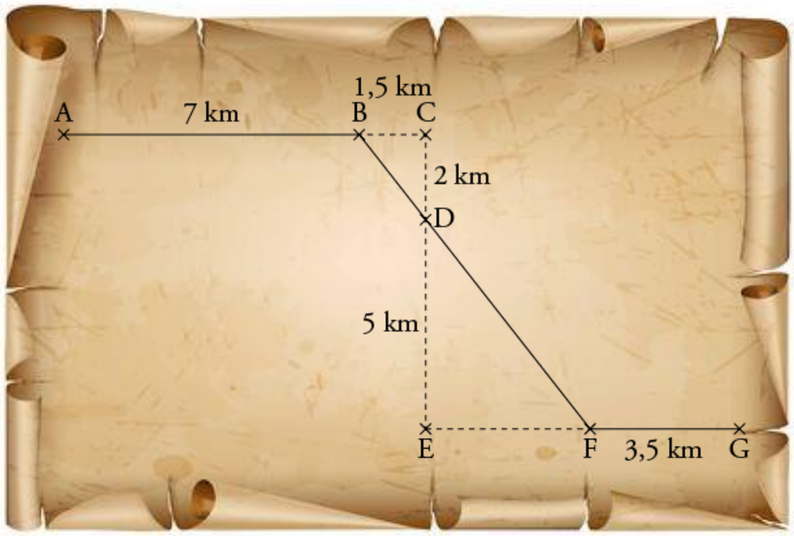
N°	Question	A	B	C
1	*Dans un club sportif, $\frac{1}{8}$ des adhérents ont plus de 42 ans et $\frac{1}{4}$ des adhérents ont moins de 25 ans. La proportion d'adhérents ayant un âge entre 25 et 42 ans est :*	Soda $\frac{1}{8}$	Jus de fruit $\frac{3}{8}$	Eau $\frac{5}{8}$
2	*Le produit de 18 facteurs égaux à -8 s'écrit :*	Salade -8^{18}	Soupe $(-8)^{18}$	Quiche $18 \times (-8)$
3	*L'écriture en notation scientifique du nombre 587 000 000 est :*	Viande $5{,}87 \times 10^6$	Poisson 587×10^6	Omelette $5{,}87 \times 10^8$
4	*Il reste 50 Go (GigaOctets) de mémoire libre sur mon ordinateur, combien de fichiers de 500 Mo (MégaOctets) puis-je encore y stocker ?*	Camembert *1 000*	Fromage blanc *100*	Gruyère *550*
5	*L'image de 3 par la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 7$ est :*	Tarte *10*	Glace *7*	Fruit *22*

1-Eau ; 2-Soupe ; 3-Omelette ; 4-Fromage blanc ; 5-Tarte

Son repas est composé d'eau, d'une soupe, d'une omelette, d'un fromage blanc et d'une tarte

Exercice 2 : Carte d'orientation (18 points)

Voici le plan d'une carte qui représente un rallye VTT sur un parcours balisé.
Ce plan n'est pas à l'échelle.
Le trajet à effectuer est représenté en traits pleins.
Le départ du rallye est en A et l'arrivée est en G.
Les points A, B, C sont alignés.
Il en est de même pour les points C, D, E puis B, D, F puis E, F, G.
Les triangles BCD et DEF sont rectangles respectivement en C et en E.



1) Montrer que la longueur BD est égale à 2,5 km.

Comme BCD est un triangle rectangle en C, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$BD^2 = BC^2 + CD^2$

$BD^2 = 1{,}5^2 + 2^2$

$BD^2 = 2{,}25 + 4$

$BD^2 = 6{,}25$

$BD = \sqrt{6{,}25}$

BD = 2,5 km

2) Justifier que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

On sait que (BC) et (EF) sont toutes les deux perpendiculaires à (CE) ;
Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc (BC) // (EF)

3) Calculer la longueur DF.

On sait que les triangles BCD et DEF sont en configuration de Thalès et (BC)//(EF)
On peut donc utiliser le théorème de Thalès pour conclure que les longueurs des côtés des deux triangles sont proportionnelles, c'est-à-dire :

$$\frac{DB}{DF} = \frac{DC}{DE} = \frac{BC}{FE}$$

$$\frac{2{,}5}{DF} = \frac{2}{5} = \frac{BC}{FE}$$

$$DF = \frac{2{,}5 \times 5}{2}$$

DF = 6,25 km

4) Calculer la longueur totale du parcours.

P = AB + BD + DF + FC

P = 7 + 2,5 + 6,25 + 3,5

P = 19,25 km Le parcours mesure 19,25 km

5) Michel roule à une vitesse moyenne de 14 km/h pour aller du point A au point B.
Combien de temps mettra-t-il pour aller du point A au point B ?

$$t = \frac{d}{v} = \frac{7}{14} = 0{,}5\ h$$

0, 5 h = 0,5x60min = 30 min
Michel mettra 30 min pour aller de A à B.

Exercice 3 : La meilleure carte (16 points)

Un jeu contient plusieurs cartes avec des programmes de calculs. Léa tire la carte A et Tom tire la carte B.
Le gagnant est celui qui obtient le plus grand résultat en choisissant le même nombre de départ.

Carte A	**Carte B**
• Choisir un nombre • Calculer le carré de ce nombre • Ajouter le triple du nombre de départ	• Choisir un nombre • Ajouter 3 • Multiplier par le nombre de départ

1) Léa et Tom doivent calculer le résultat obtenu en choisissant 12 comme nombre de départ.
Aide-les à faire les calculs. Qui gagne ?

2) Quel résultat obtient-on avec le programme de la carte A si on choisit –5 comme nombre de départ ?

Pour 12
A = 12^2 + 3x12
A = 144 + 36
A = 180

Pour 12
B = (12 + 3) x 12
B = 15 x 12
B = 180

Léa et Tom sont ex-aequo.

Pour -5
A = $(-5)^2$ + 3x(-5)
A = 25 + (-15)
A = 10

3) La feuille de tableur ci-contre donne des résultats des programmes A et B.

	A	B	C
1	Nombre choisi	Programme A	Programme B
2	1	4	4
3	2	10	10
4	3	18	18
5	4	28	28
6	5	40	40
7			

a) Parmi les formules suivantes, recopier celle qui a été saisie dans la cellule C2 avant d'être étirée.

(1+3)*1   =N+3*N   =A2+3*A2   =(1+3)*1   =(A2+3)*A2

b) À la lecture du tableur, quelle conjecture peut-on faire pour ces 2 programmes et pour le gagnant ?
On peut conjecturer que les résultats des deux programmes sont égaux pour tous les nombres. Par conséquent, quel que soit le choix de départ, Tom et Léa seront toujours ex-aequo.

c) Montrer que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.
Soit x le nombre de départ. Les deux programmes peuvent se modéliser par les expressions suivantes :

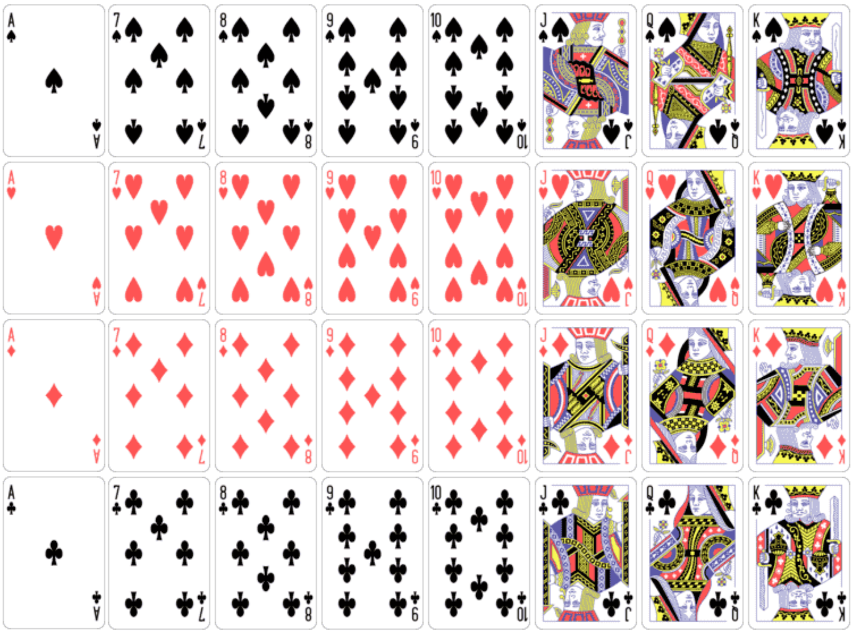
A = $x^2 + 3\times x$ et   B = $(x + 3) \times x$
A = $x^2 + 3x$ B = $x^2 + 3 \times x$
B = A

Exercice 4 : Jeu de cartes à jouer (14 points)

Dans cet exercice, aucune justification n'est attendue.

Un jeu de 32 cartes est constitué de 4 sortes de cartes : PIQUE, CŒUR, CARREAU, TREFLE.

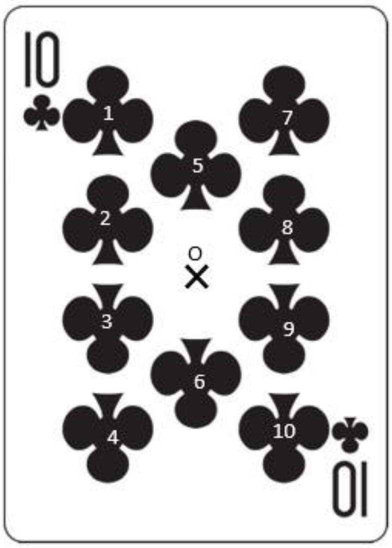
Chaque sorte contient : un 7, un 8, un 9, un 10, un valet, une dame, un roi et un as.



1) Les cartes sont mélangées et retournées face contre table. Elles sont toutes indiscernables au toucher. Etienne tire des cartes au hasard.
   a) Quelle est la probabilité qu'Etienne tire la dame de cœur ? => 1/32
   b) Quelle est la probabilité qu'il tire un trèfle ? => 8/32 = 1/4
   c) Quelle est la probabilité qu'il tire un As ? => 4/32 = 1/8
   d) Quelle est la probabilité qu'il tire un 11 de carreau ? => 0/32 = 0

2) Etienne observe que si on ne tient pas compte des annotations dans les coins, les cartes peuvent s'obtenir à partir de transformations. Sans tenir compte des annotations dans les coins :
   a) Citer toutes les cartes COEUR qui ont un seul axe de symétrie. => 1, 7, 8, 9, 10
   b) Citer toutes les cartes TREFLE qui ont deux axes de symétrie. => 10
   c) Citer toutes les cartes PIQUE qui ont un centre de symétrie. => 10, valet, dame, roi
   d) Citer toutes les cartes CARREAU qui ont un centre de symétrie. => 1, 8, 9, 10, valet, dame roi

3) Etienne a pioché une carte au hasard et il a tiré le 10 de trèfle. Il a numéroté chacun des motifs de 1 à 10 comme indiqué ci-contre :
   a) Quelle est l'image du motif 1 par la translation qui transforme le motif 3 en motif 10 ? => motif 8
   b) Quelle est l'image du motif 4 par la symétrie centrale de centre O ? => motif 7



Exercice 5 : Carte de crédit (12 points)

Toutes les cartes de crédit ont une dimension standard.

On donne : DC = 8,5 cm et $\widehat{BDC}$ = 32°.

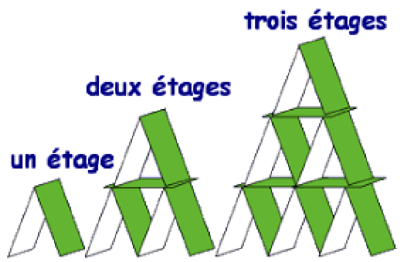
1) Calculer la largeur BC de la carte au mm près.
Comme le triangle BCD est un triangle rectangle en C, on peut utiliser la formule de la tangente.
tan ($\widehat{BDC}$) = $\frac{BC}{DC}$
tan (32) = $\frac{BC}{8,5}$
BC = 8,5 x tan(32)
BC ≈ 5,3 cm

2) Un code de carte bancaire est composé de 4 chiffres de 0 à 9.
On peut utiliser plusieurs fois le même chiffre.
   a) Combien y-a-t-il de codes différents possibles pour un code de carte bancaire ?
   10 x 10 x 10 x 10 = 10^4 = 10 000 possibilités
   b) Le code de Marie comporte les chiffres 2, 5, 7 et 8. Mais elle a totalement oublié l'ordre des chiffres ! Combien y a-t-il de possibilités pour son code ? 4x3x2x1 = 24 possibilités

3) Un rectangle est appelé rectangle d'or s'il vérifie $\frac{longueur}{largeur} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   a) Calculer $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ avec la calculatrice. Donner le résultat au dixième près. ≈ 1,6
   b) Utiliser votre résultat pour dire si une carte bancaire est un rectangle d'or au dixième près.
   $\frac{longueur}{largeur} = \frac{DC}{BC} = \frac{8,5}{5,3}$ ≈ 1,6 donc oui une carte bancaire est bien un rectangle d'or.

Exercice 6 : Château de cartes (18 points)

Catherine veut faire le plus haut château de cartes construit selon le modèle ci-contre :



1) Calculer le nombre de cartes nécessaires pour construire un château de 1 étage, 2 étages, 3 étages, 4 étages puis 5 étages.
Pour 1 étage : 2 cartes
Pour 2 étages : 2 + 2x2 + 1 = 7 cartes
Pour 3 étages : 7 + 3x2 + 2 = 15 cartes
Pour 4 étages : 15 + 4x2 + 3 = 26 cartes
Pour 5 étages : 26 + 5x2 + 4 = 40 cartes

2) Si on appelle n le nombre d'étages, on admet que la formule qui permet de calculer le nombre de cartes en fonction du nombre d'étages est $f(n) = 0,5n(3n + 1)$.
   a) Développer puis réduire l'expression $f(n) = 0,5n(3n + 1)$ = $1,5n^2 + 0,5n$
   b) Calculer $f(100)$ = 0,5 x 100 x (3 x 100 + 1) = 50 x 301 = 15 050.
   c) Traduire $f(8) = 100$ par une phrase sur les cartes et les étages du château.
   Pour obtenir un château à 8 étages, il faut 100 cartes.

3) La représentation graphique de la fonction *f* est donnée sur la page suivante.

a) Représente-t-elle une situation de proportionnalité ? Justifier. Non car le graphique n'est pas une droite (ou les points ne sont pas alignés entre eux).

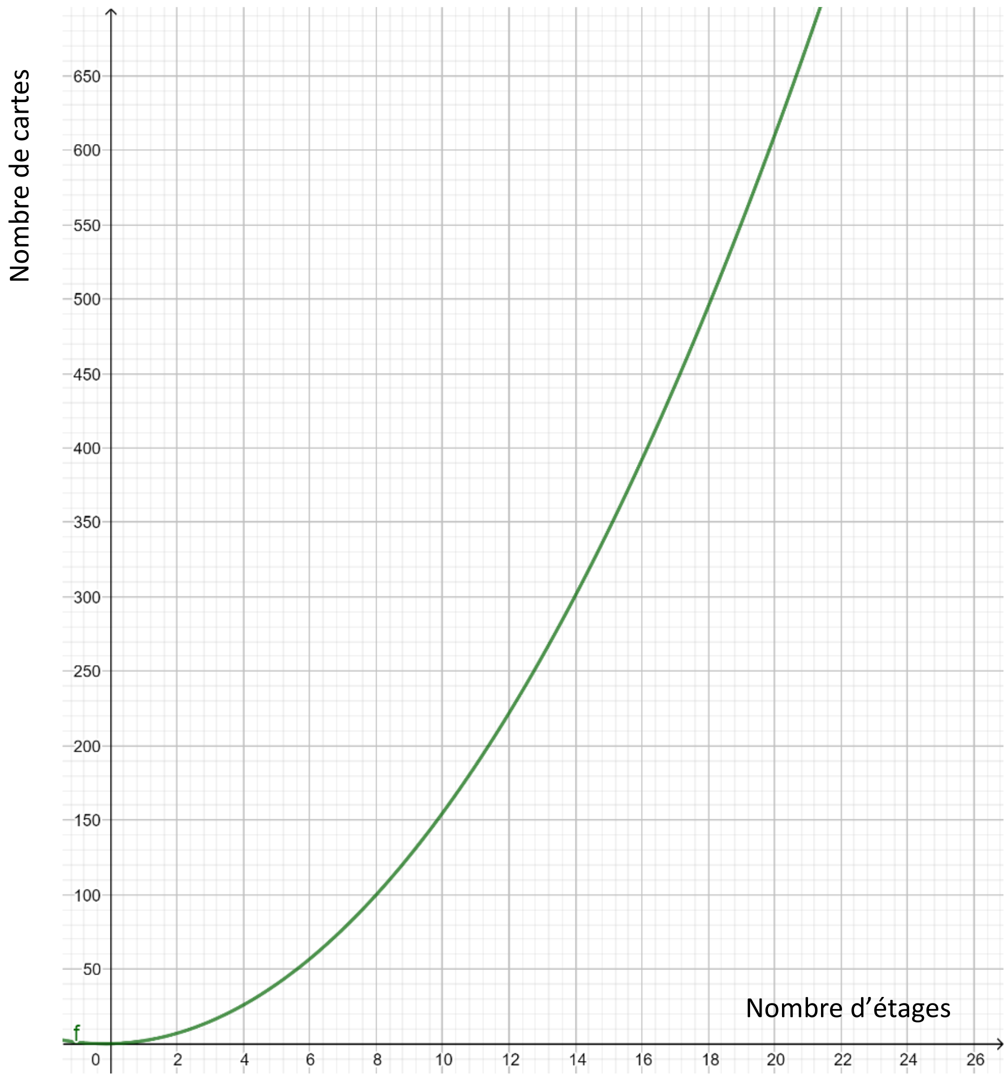
b) Lire graphiquement le nombre de cartes nécessaires pour un château de 20 étages. 610 cartes

c) Vérifier ce résultat par un calcul. *f*(20) = 0,5 x 20 (3 x 20 + 1) = 10 x 61 = 610

d) Lire graphiquement le nombre d'étages maximal réalisable avec 520 cartes. Au maximum 18 étages

4) Catherine veut réaliser un grand château avec 20 jeux de 52 cartes.
Combien d'étages maximum pourra-t-elle réaliser ?
Toute démarche cohérente sera valorisée même si vous n'aboutissez pas au résultat.
20 x 52 = 1040 cartes
Par essais-erreurs :
Pour 30 étages *f*(30) =0,5 x 30 x (3 x 30 + 1) = 1365 cartes => c'est trop
Pour 25 étages *f*(25) = 0,5 x 25 x (3 x 25 + 1) = 950 cartes => en dessous
Pour 26 étages *f*(26) = 0,5 x 26 x (3 x 26 + 1) = 1027 cartes => en dessous et on se rapproche
Pour 27 étages *f*(27) = 0,5 x 27 x (3 x 27 + 1) = 1107 cartes => c'est trop
Catherine pourra faire un château de 26 étages.

Représentation graphique de la fonction *f* définie par la formule *f*(*n*) = 0,5*n*(3*n* + 1).

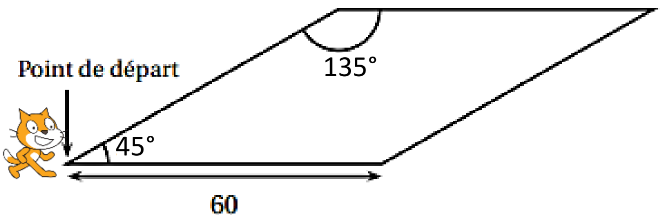


Exercice 7 : Cartes design (12 points)

Le dos des cartes de jeu est souvent constitué de très beaux dessins géométriques.
Le but est de programmé la construction de l'étoile centrale avec Scratch.

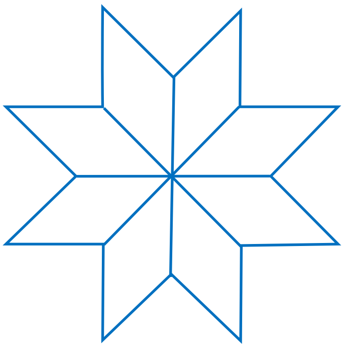
1) **Recopier sur votre copie** et compléter les bulles des lignes 3, 5, 7, 8, 9 et 10 du bloc Losange (Doc 2) afin d'obtenir le motif Losange (Doc 1).

Doc1 : Le motif **Losange**

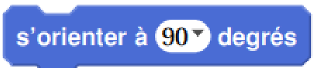


Doc2 : Le bloc **Losange**

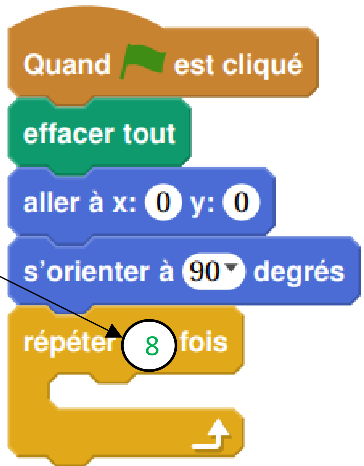
Doc3 : l'étoile centrale



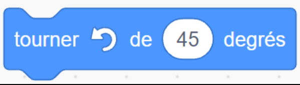
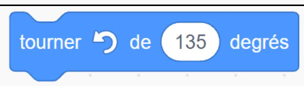
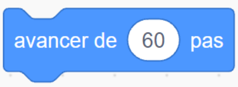
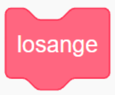
2) On souhaite réaliser l'étoile centrale (doc3) en utilisant le bloc **Losange** complété à la question 1).

On rappelle que l'instruction  signifie que l'on se dir

a) Recopier sur votre copie le bloc répéter ◯ fois et compléter la bulle.



b) Parmi les quatre instructions ci-dessous, deux d'entre elles servent à finir le programme. Indiquer sur votre copie, dans le bon ordre, les numéros des 2 instructions à placer dans la boucle. 4 puis 1

1.  tourner de 45 degrés	2.  tourner de 135 degrés
3.  avancer de 60 pas	4.  losange

c) Par quelle transformation passe-t-on du losange 1 au losange 3 ?

On passe du losange 1 au losange 3 par la rotation de centre O d'angle 90° (2×45°) dans le sens indirect (sens contraire des aiguilles d'une montre).