A LA DECOUVERTE DES EQUATIONS

I. QU'EST-CE QU'UNE EQUATION ?

Définitions :

On appelle ……………………… une égalité de deux expressions littérales (les ………………………… de l'équation) dans laquelle apparait au moins un nombre de valeur inconnue généralement représenté par une lettre. On les appelle d'ailleurs les ………………………… de l'équation.

Remarque et définition :

Ces égalités peuvent être ……………… pour certains nombres, et …………… pour d'autres. Lorsqu'un ou plusieurs nombres permettent d'obtenir une égalité vraie, on dit qu'il s'agit de ………………… de l'équation.

Exemple : $2\boldsymbol{x} + 4 = 16 - \boldsymbol{x}$ est une …………………

$\boldsymbol{x}$ est l'…………………

$2x + 4$ et $16 - x$ sont les ………………… de cette équation.

On peut tester cette égalité pour les nombres suivants : $\boldsymbol{x} = 0$, $\boldsymbol{x} = 1$ et $\boldsymbol{x} = 5$.

- Pour $\boldsymbol{x} = 0$:
  D'une part : G = ………………… D'autre part : D = ………………
  G = ………………… D = ………………
  G = ………………… D = ………………
  Pour $\boldsymbol{x}$ = … , l'égalité est …………………… Donc, 0 …………………….. une solution de l'équation.

- Pour $\boldsymbol{x} = 1$:
  D'une part : G = ………………… D'autre part : D = ………………
  G = ………………… D = ………………
  G = ………………… D = ………………
  Pour $\boldsymbol{x}$ = … , l'égalité est …………………… Donc, 1 …………………….. une solution de l'équation.

- Pour $\boldsymbol{x} = 5$:
  D'une part : G = ………………… D'autre part : D = ………………
  G = ………………… D = ………………
  G = ………………… D = ………………
  Pour $\boldsymbol{x}$ = … , l'égalité est …………………… Donc, 5 …………………….. une solution de l'équation.

A partir de ces 3 tests, on pourrait conjecturer qu'il n'existe pas de nombre x pour lequel l'égalité est vraie. Pourtant, il en existe bien un. Essayons le nombre 4.

- Pour $\boldsymbol{x} = 4$:
  D'une part : G = ………………… D'autre part : D = ………………
  G = ………………… D = ………………
  G = ………………… D = ………………
  Pour $\boldsymbol{x}$ = … , l'égalité est …………………… Donc, 4 …………………….. une solution de l'équation.

Définition :

…………………………………………………… consiste à déterminer toutes les solutions de l'équation (c'est-à-dire toutes les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'égalité est vraie).

Remarques :

1) Une équation peut avoir plusieurs solutions.
2) Une équation peut avoir aucune solution.

Dans l'exemple précédent, on a simplement testé l'égalité pour certaines valeurs ($\boldsymbol{x} = 0$, $\boldsymbol{x} = 1$, $\boldsymbol{x} = 5$, $\boldsymbol{x} = 4$) afin de déterminer s'il s'agissait ou non de solutions. On a trouvé 4 comme solution. Mais, cette méthode de « tests » a ses limites :

- d'abord, il y a une infinité de nombres ; il est donc impossible de tous les tester.
- ensuite, on ne dispose d'aucun moyen de s'assurer que 4 est le seule solution (on ne sait pas s'il y en a d'autres).

Nous devons donc découvrir des méthodes de résolution efficaces qui nous permettront d'obtenir directement et immédiatement toutes les solutions de l'équation.

II) Deux points de reperes grace a deux equations de reference :

Equation « additive » : de la forme $a + x = b$

Soient a et b deux nombres quelconques fixés.
L'équation de la forme $a + x = b$ n'a qu'une seule solution qui est $b - a$.

Exemples :

$4 + x = 10$
$x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$x = \dots$
La solution de l'équation $4 + x = 10$ est ….

$x - 16 = 5$
$x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$x = \dots$
La solution de l'équation $x - 16 = 5$ est …

Equation « multiplicative » : de la forme $ax = b$

Soient a et b deux nombres quelconques fixés.
L'équation de la forme $ax = b$ n'a qu'une seule solution qui est $\frac{b}{a}$.

Exemples :

$4x = 12$
$x = \dots\dots\dots\dots$
$x = \dots$
La solution de l'équation $4x = 12$ est ….

$7x = 11$
$x = \dots\dots$
La solution de l'équation $7x = 11$ est ….

$\frac{2}{3}x = \frac{5}{7}$
$x = \dots$
$x = \dots\dots \times \dots\dots$
$x = \dots$
La solution de l'équation $\frac{2}{3}x = \frac{5}{7}$ est ….

III) Comment resoudre une equation du premier degre dans le cas general ?

Pour résoudre les équations dans le cas général, on utilise deux propriétés sur les égalités.

Propriétés :

1) Une égalité ne change pas si on additionne ou si on soustrait chacun de ses membres par un même nombre.
2) Une égalité ne change pas si on multiplie ou si on divise chacun de ses membres par un même nombre non nul.

Exemple :

Méthode de résolution de l'équation :	**$8(x + 2) - 25 = 10 + 3(x + 4)$**
1re étape : *On réduit au besoin les deux membres de l'équation :*	……………………………………………… ………………………………………………
2e étape : *On regroupe tous les « termes en x » dans un des deux membres, par exemple celui de gauche :*	……………………………………………… ………………………………………………
3e étape : *On regroupe tous les « termes constants » dans l'autre membre, ici celui de droite :*	……………………………………………… ………………………………………………
4e étape : *On reconnaît l'une des deux équations de références dont on connaît la solution :*	……………………………………………… ………………………………………………
5e étape : *On conclut :*	L'équation **$8(x + 2) - 25 = 10 + 3(x + 4)$** a une seule solution qui est … .